

УДК 539.3

© В.І. Кузьменко, І.І. Бабошкін, С.В. Гаркуша

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ МАСИВНИХ СПОРУД  
ІЗ НЕОДНОРІДНИМИ ТА АНІЗОТРОПНИМИ ОСНОВАМИ**

Запропонована постановка зв'язаних задач взаємодії жорстких тіл із пружними неперервно-неоднорідними та анізотропними основами. Розроблена методологія числового розв'язання, яка ґрунтується на варіаційному формулюванні та скінченно-елементній апроксимації. Наведені результати розв'язання контактних задач плоскої деформації.

Предложена постановка связанных задач взаимодействия жестких тел с упругими непрерывно-неоднородными и анизотропными основаниями. Разработана методология численного решения, которая базируется на вариационной формулировке и конечно-элементной аппроксимации. Приведены результаты решения контактных задач плоской деформации.

The formulation of coupled problems of rigid bodies' interaction with elastic continuously heterogeneous and anisotropic bases has been offered. Numerical solution's technique which is based on variational formulation and finite element approximation has been developed. The results of solving problem of plane deformation have been presented.

Проектування масивних об'єктів промислового та житлового призначення потребує попереднього прогнозу поведінки таких об'єктів у залежності від властивостей основ та фундаментів. Наявність шарів ґрунту із різними механічними властивостями, неоднорідностей техногенного характеру (шахтних виробок, тунелів метрополітену, підземних енергокомунікацій) спонукає до вивчення дії важких споруд на істотно-неоднорідні основи зі складною структурою. Інша проблема пов'язана із залежністю зовнішніх сил, що діють на споруду, від деформування основи.

За допомогою класичних підходів лінійної теорії пружності вдалося побудувати ефективні методи дослідження багат шарових основ нескінченних розмірів [1]. Застосування числових методів відкрило можливість дослідження шаруватих пружно-пластичних тіл скінченних розмірів [2]. Алгоритми розв'язання зв'язаної задачі взаємодії штампів із шаруватою основою запропоновані у роботах [3,4].

Дана робота має на меті створення математичної моделі поведінки системи «основа – споруда» із довільним характером неоднорідності та анізотропії властивостей матеріалу основи.

Сформулюємо основні припущення та співвідношення математичної моделі. Вважаємо, що механічні властивості основи можна описати за допомогою співвідношень неоднорідного анізотропного лінійно-пружного тіла. Споруда вважається абсолютно твердим тілом і далі називатиметься штампом.

Введемо декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . Під  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  розуміємо радіус-вектор точок основи. Через  $\vec{u}(\vec{x}), \varepsilon_{ij}(\vec{x}), \sigma_{ij}(\vec{x})$  позначимо вектор малих переміщень та компоненти тензорів малих деформацій та напружень. Основа у недеформованому стані займає область  $\Omega$  простору, обмежену поверхнею  $\Gamma$ . Поверхня  $\Gamma$  складається із трьох частин  $\Gamma_u, \Gamma_\sigma, \Gamma_\epsilon$ . На частині  $\Gamma_u$  поверхні основа закріплена, а на частині  $\Gamma_\sigma$  вільна від навантаження. На частині  $\Gamma_\epsilon$  ві-

дбується взаємодія основи зі штампом. Вважаємо, що у точках контакту поверхні основи і штамп зчеплені.

Опишемо рух штампу як абсолютно твердого тіла. Візьмемо за полюс певну точку штампу на поверхні зчеплення. Позначимо через  $\vec{U}$  вектор переміщення полюса, а через  $\vec{\theta}$  – вектор повороту штампу навколо осі., що проходить через полюс. Вектори  $\vec{U}$  і  $\vec{\theta}$  однозначно задають переміщення кожної точки штампу, викликане переміщенням  $\vec{U}$  та поворотом  $\vec{\theta}$ . Тоді вимога зчеплення штампу із основою має вигляд векторної рівності:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\vec{x}, \vec{U}, \vec{\theta}), \forall \vec{x} \in \Gamma_c. \quad (1)$$

Оскільки у точках поверхні  $\Gamma_u$  основа закріплена, то

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \Gamma_u. \quad (2)$$

Поверхня  $\Gamma_\sigma$  вільна від навантажень, тому

$$\sigma_{ij}(\vec{x})v_j(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (3)$$

Через  $v_j(\vec{x})$  позначено компоненти вектора нормалі до поверхні  $\Gamma_c$  у точці  $\vec{x}$ .

За визначальні співвідношення обираємо співвідношення узагальненого закону Гука для неоднорідного анізотропного тіла:

$$\sigma_{ij} = A_{ijklm}(\vec{x})\varepsilon_{lm}. \quad (4)$$

Вважаємо, що пружні коефіцієнти  $A_{ijklm}(\vec{x})$  у сукупності задовольняють умову додатної визначеності густини енергії деформації:

$$A_{ijklm}(\vec{x})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq \alpha_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \alpha_0 > 0. \quad (5)$$

Будь-які інші спеціальні вимоги на коефіцієнти  $A_{ijklm}(\vec{x})$  не накладаються.

Крім того, компоненти тензора напружень повинні задовольняти рівняння рівноваги:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \Omega, \quad (6)$$

а компоненти тензора деформацій пов'язані з компонентами вектора переміщень співвідношеннями Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (7)$$

Отримаємо задачу визначення функцій  $\vec{u}(\vec{x}), \varepsilon_{ij}(\vec{x}), \sigma_{ij}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega$ , які задовольняють рівняння та умови (1)–(7).

Числове розв'язання задачі ґрунтується на переході від диференціального формулювання крайової задачі до відповідного варіаційного формулювання.

Введемо простір С.Л. Соболева  $[W_2^{(1)}(\Omega)]^3$  вектор-функцій  $\vec{v}(\vec{x})$ , визначених в області  $\Omega$ . Виділимо у цьому просторі множину  $V$  допустимих переміщень:

$$V = \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) \mid \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \Gamma_u; \vec{v}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\vec{x}, \vec{U}, \vec{\theta}), \forall \vec{x} \in \Gamma_c\}.$$

Введемо позначення  $\zeta_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ . Задача визначення дійсних переміщень точок основи може бути сформульована як задача знаходження вектор-функції  $\vec{u}(\vec{x}) \in V$ , для якої функціонал

$$I(\vec{v}) = \int_{\Omega} A_{ijkl}(\vec{x}) \zeta_{ij}(\vec{x}) \zeta_{kl}(\vec{x}) d\Omega$$

набуває значення своєї точної нижньої грані на множині  $V$  [2].

Із урахуванням умови (6) та за досить широких вимог до форми тіла  $\Omega$  така варіаційна задача має єдиний розв'язок [2].

Викладена постановка задачі ґрунтується на припущенні, що вектори  $\vec{U}$  та  $\vec{\theta}$ , які задають рух штапу, є відомі. Однак у разі, коли зовнішні сили, які діють на штап, є сили тяжіння, таке припущення є неприйнятне. Унаслідок деформування неоднорідної основи можливий поворот штапу. Це призводить до виникнення моменту сил тяжіння, прикладених до штапу. У свою чергу, додатковий момент впливає на деформування основи, а, отже, і на рух штапу. Тому вектори  $\vec{U}$  та  $\vec{\theta}$  не можуть вважатись заданими заздалегідь і повинні бути віднесені до невідомих задачі. У такому разі постановку задачі слід доповнити ще й умовами рівноваги штапу під дією сил тяжіння та контактних зусиль.

Нехай  $\vec{P}_*(\vec{U}, \vec{\theta}), \vec{M}_*(\vec{U}, \vec{\theta})$  – головний вектор та головний момент сил тяжіння, прикладених до штапу, у разі його переміщення, що відповідає векторам  $\vec{U}$  та  $\vec{\theta}$ . Через  $\vec{P}(\vec{U}, \vec{\theta}), \vec{M}(\vec{U}, \vec{\theta})$  позначимо головний вектор та головний момент контактних зусиль, знайдених шляхом розв'язання сформульованої вище задачі за фіксованих векторів  $\vec{U}$  та  $\vec{\theta}$ . Тоді умови рівноваги штапу мають вигляд

$$\begin{cases} \vec{P}(\vec{U}, \vec{\theta}) + \vec{P}_*(\vec{U}, \vec{\theta}) = 0, \\ \vec{M}(\vec{U}, \vec{\theta}) + \vec{M}_*(\vec{U}, \vec{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Рівняння (8) доповнюють сукупність співвідношень крайової задачі і дозволяють знайти переміщення і повороти штапу у разі дії сил тяжіння. Розглянемо конкретний алгоритм знаходження  $\vec{U}$  і  $\vec{\theta}$ , який ґрунтується на ідеї розщеплення.

Подамо рівняння (8) у формі еквівалентної екстремальної задачі знаходження векторів  $\vec{v}$  і  $\vec{\theta}$ , для яких функція

$$F(\vec{v}, \vec{\theta}) = |\vec{P}(\vec{v}, \vec{\theta}) + \vec{P}_*(\vec{v}, \vec{\theta})|^2 + |\vec{M}(\vec{v}, \vec{\theta}) + \vec{M}_*(\vec{v}, \vec{\theta})|^2$$

досягає свого найменшого значення.

Для розв'язання такої задачі безумовної мінімізації застосуємо прямі методи нульового порядку, тобто методи, на кожній ітерації яких треба обчислювати лише значення функції  $F(\vec{v}, \vec{\theta})$ . Це означає, що в процесі мінімізації функції  $F(\vec{v}, \vec{\theta})$  доводиться розв'язувати сформульовану крайову задачу для фіксованих векторів  $\vec{v}$  і  $\vec{\theta}$ , а потім знаходити вектори  $\vec{P}(\vec{v}, \vec{\theta})$  і  $\vec{M}(\vec{v}, \vec{\theta})$ . Серед мето-

дів нульового порядку найбільш зручним та ефективним виявився метод локальних варіацій.

Розглянемо алгоритм розв'язання варіаційної задачі

$$\inf_{\vec{v} \in V} I(\vec{v})$$

Скористаємось скінченно-елементною апроксимацією  $\vec{v}_h(\bar{x})$  вектор-функції  $\vec{v}_h(\bar{x}) \in V$ . Сукупність таких апроксимацій утворює підмножину  $V_h \subseteq V$ . На цій скінченно-вимірній множині функціонал  $I(\vec{v})$  фактично перетворюється на функцію багатьох змінних. Оскільки припустимі вектор-функції належать простору  $[W_2^{(1)}(\Omega)]^3$ , то доцільно скористатись відповідними узгодженими елементами, наприклад, найпростішими елементами, або елементами лагранжевого та сирендипового типів. У такому разі отримуємо задачу пошуку вузлових значень із умови мінімуму функції багатьох змінних. Для розв'язання такої задачі було використано метод послідовної верхньої релаксації.

Проілюструємо можливості запропонованої методології на прикладі задачі плоскої деформації про дію штампу на поверхню основи (рис. 1).

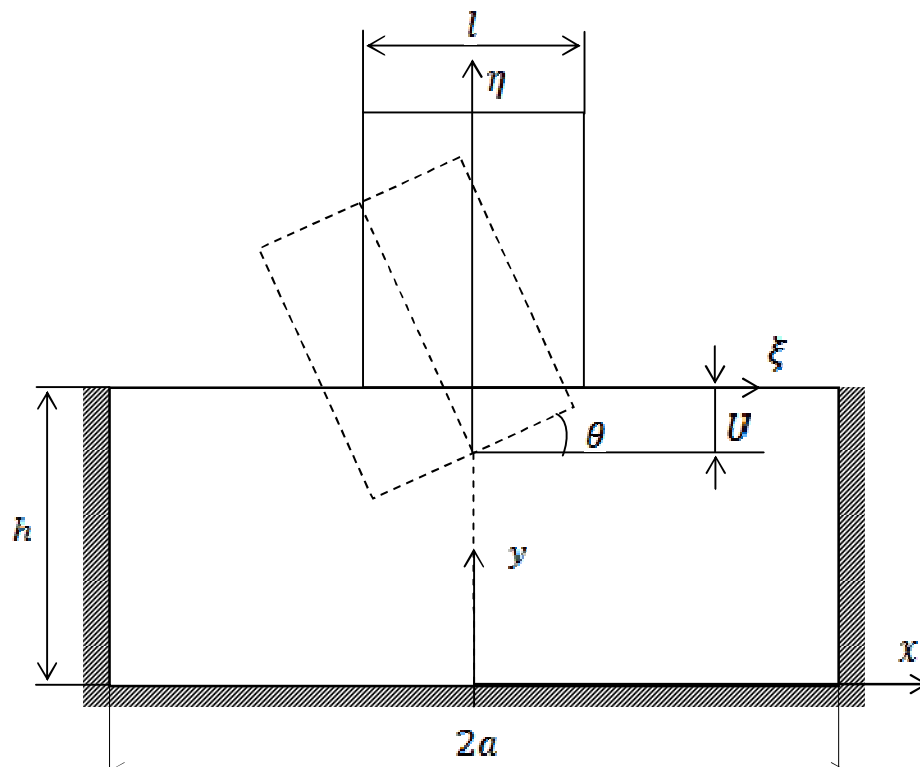


Рис. 1. Дія штампу на поверхню основи

На рис. 2, 3 подані розподіли нормальних і дотичних контактних напружень у разі поступального вдавлювання штампу у неоднорідну ізотропну основу. Коефіцієнт Пуассона змінювався за законом  $\nu(x) = 0,35 - \frac{x+a}{8a}$ . Розрахунки

виконані при  $2a/h = 1$ ;  $l/\alpha = 0,4$ . Для порівняння штрихованою лінією показані розподіли контактних напружень у разі однорідної основи при  $\nu = 0,35$ .

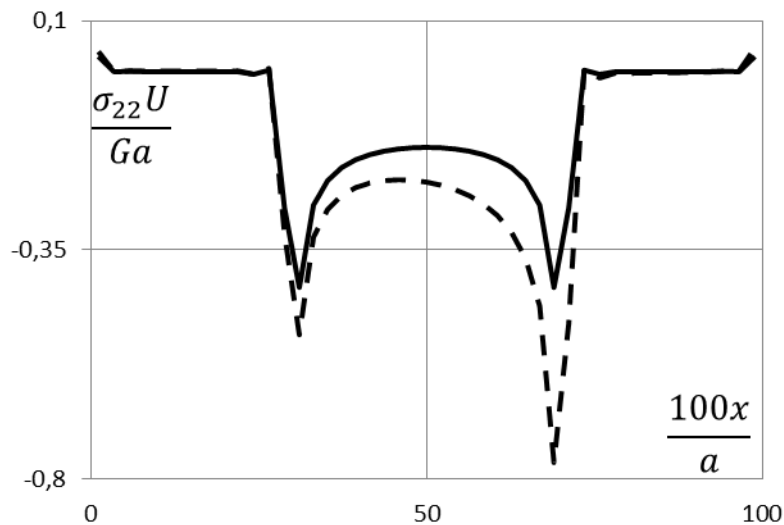


Рис. 2. Нормальні контактні напруження при дії штапу на неоднорідну основу

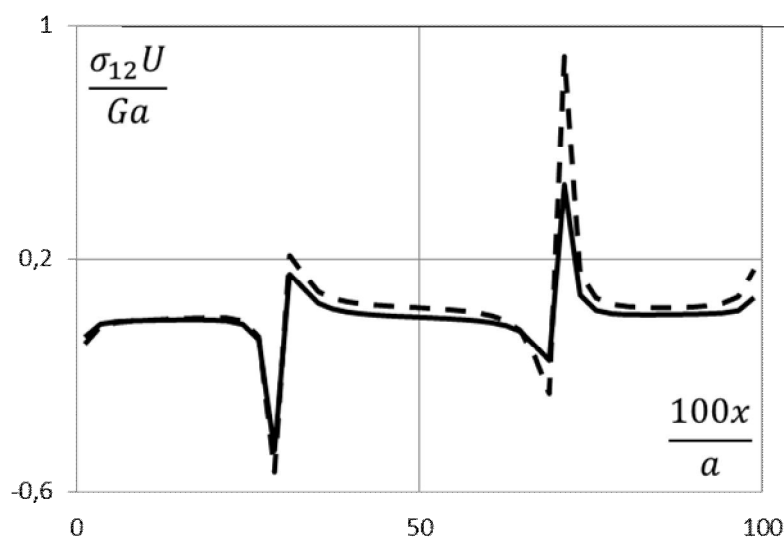


Рис. 3. Дотичні контактні напруження про дію штапу на неоднорідну основу

Звернемо увагу на асиметрію контактних напружень, викликану неоднорідністю основи. Зауважимо, що така асиметрія більш характерна для розподілу нормальних контактних напружень.

На рис 4 умовно, у вигляді спотвореної скінченноелементної сітки, показаний характер деформування на глибину  $U$ ; поворот штапу дорівнював  $\theta = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{U}{l}$ . Розрахунки виконані при  $\frac{a}{l} = 0,5$ ;  $\frac{\nu}{h} = 0,125$  та за таких співвідношень пружних модулів:

$$\frac{A_{1111}}{A_{2222}} = 1; \frac{A_{1122}}{A_{2222}} = 0,4; \frac{A_{1212}}{A_{2222}} = 0,7$$

Вплив відношення  $\frac{A_{1111}}{A_{2222}}$  на розподіл нормальних контактних напружень ілюструє рис. 5.

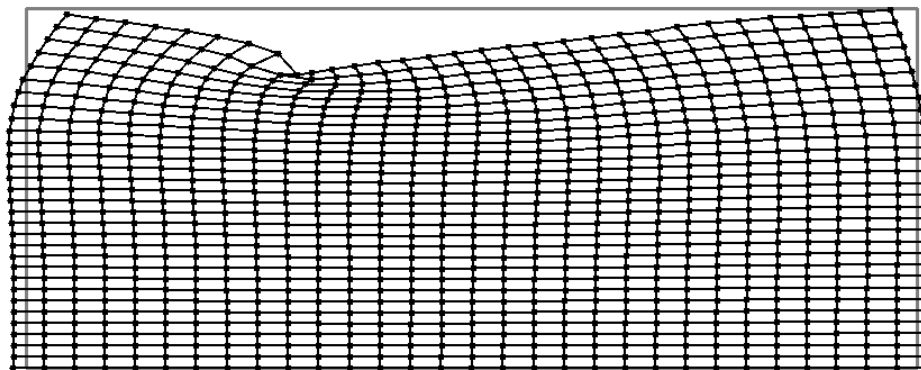


Рис. 4. Деформована скінченноеlementна сітка

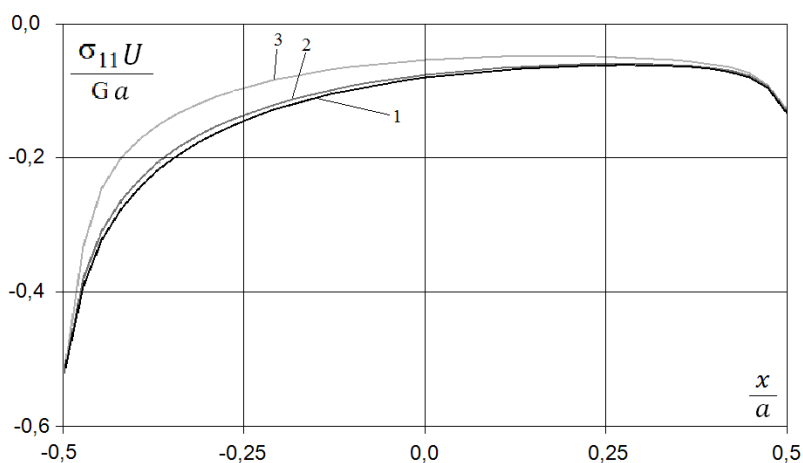


Рис. 5. Нормальні контактні напруження при дії штампу на ортотропну основу:

$$1 - \frac{A_{1111}}{A_{2222}} = 1; 2 - \frac{A_{1111}}{A_{2222}} = 1,2; 3 - \frac{A_{1111}}{A_{2222}} = 1,4$$

**Висновки:** Запропонована постановка нового класу зв'язаних контактних задач для істотно неоднорідних та анізотропних тіл. Розроблені алгоритми числового розв'язання. Результати роботи можуть бути використані при проектуванні основ та фундаментів масивних споруд. Подальші дослідження варто спрямувати на дослідження контактної взаємодії в умовах повзучості та на вивчення стійкості споруд на неоднорідних основах.

#### Список літератури

1. Ильман В.М., Приварников А.К., Ламзюк В.Д. О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием // Изв. АН СССР. Механика твердого тела – 1975. – №5. – С. 134–138.
2. Кузьменко В.И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел. // Прикл. математика и механика. –1979. –Т.43, вып. 5. – С. 893–901.
3. Власенко Ю.С. Взаємодія важких штампів з багатошаровою пружнопластичною основою, що містить включення; автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук. – Дніпропетровськ, 2010. – 20 С.

4. Власенко Ю.Е., Кузьменко В.И. О влиянии свойств упругости основания на осадки и повороты массивных сооружений // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, 2008. – №1–2. – С. 57–65.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Сдвіжковою О.О.  
Надійшла до редакції 11.04.2013*

УДК 66.022.63:502.36

© Д.В. Рудаков, А.Д. Ляховко

## **ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОЦИКЛОНА ДЛЯ СНИЖЕНИЯ ОБЪЕМОВ ПЫЛЕВЫХ ВЫБРОСОВ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЙ (НА ПРИМЕРЕ г. ДНЕПРОДЗЕРЖИНСКА)**

Обосновывается применение модернизированного аппарата электроциклон для очистки выбросов агломерационного производства от пыли на примере ДМК им. Дзержинского. Оценен эколого-экономический эффект уменьшения выбросов пыли в масштабах города Днепродзержинска

Обґрунтовується застосування модернізованого апарату електроциклон для очищення викидів агломераційного виробництва від пилу на прикладі ДМК ім. Дзержинського. Оцінено еколого-економічний ефект зменшення викидів пилу в масштабах міста Дніпродзержинська.

The use of the upgraded device electrical cyclone for cleaning emissions from the production of sinter dust on the example of Dneprodzerzhinsk metallurgical plant named after Dzerzhinsky is justified. An ecological and economic effect of reducing dust emissions within the city Dneprodzerzhinsk is assessed.

**Введение.** Проблема защиты атмосферного воздуха является актуальной задачей в промышленно развитых регионах, одним из которых является Днепропетровская область. Особенно высокая степень загрязнения атмосферного воздуха характерна для Днепродзержинска – крупного промышленного центра, в котором расположены несколько десятков предприятий – источников загрязнения атмосферы вредными веществами и пылью. Суммарные выбросы пыли в атмосферу города в 2011 г составили 17,936 тыс. тонн [1]. Основным загрязнителем атмосферы г. Днепродзержинска пылью является Днепровский металлургический комбинат им. Дзержинского (табл. 1). При этом в структуре выбросов, как и на любом металлургическом производстве, на долю агломерационной фабрики приходится значительная часть – более 60% выбросов пыли всего комбината [3].

Большинство промышленных предприятий – загрязнителей атмосферы были построены в прошлом веке без учета экологической составляющей. Они расположены в правобережной части города, где проживает 2/3 его населения. В этой части Днепродзержинска сложилась напряженная экологическая обстановка: значение ПДК по пыли стабильно превышено в 2–3 раза [4].